



CAHIER DE VACANCES

ENTRÉE EN TERMINALE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

Table des matières

<i>PARTIE 1 : QCM</i>	3
Exercice 1 :	3
Exercice 2 :	4
Exercice 3 :	4
Exercice 4 :	5
<i>PARTIE 2 : PROBABILITES</i>	6
Exercice 1 :	6
Exercice 2 :	6
Exercice 3 :	7
Exercice 4 :	8
Exercice 5 :	8
<i>PARTIE 3 : SUITES</i>	9
Exercice 1 :	9
Exercice 2 :	9
Exercice 3 :	10
Exercice 4 :	11
Exercice 5 :	11
<i>PARTIE 4 : ETUDE DE FONCTIONS</i>	12
Exercice 1 :	12
Exercice 2 :	12
Exercice 3 :	13
Exercice 4 :	14
<i>PARTIE 5 : PRODUIT SCALAIRE ET APPLICATIONS</i>	15
Exercice 1 :	15
Exercice 2 :	15
Exercice 3 :	16
Exercice 4 :	17

PARTIE 1 : QCM

Exercice 1 :

Question 1

L'inéquation $e^{-2x} > 0$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions :

a. $\mathbb{R}$	b. $]0 ; +\infty[$	c. $] -\infty ; 0[$	d. $\emptyset$
-----------------	--------------------	---------------------	----------------

On sait que quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $e^a > 0$. l'ensemble des solutions est donc $\mathbb{R}$. **Réponse a.**

Question 2

Pour tout réel x , $(e^x - 1)^2$ est égal à :

a. $e^{2x} - 1$	b. $e^{2x} + 1$	c. $e^{2x} - 2e^x + 1$	d. $e^{(x^2)} - 1$
-----------------	-----------------	------------------------	--------------------

D'après l'identité $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $(e^x - 1)^2 = e^{2x} + 1 - 2e^x$ **Réponse c.**

Question 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{5x-1}$.

Pour tout réel x , $f'(x)$ est égal à :

a. e^{5x-1}	b. $5e^{5x}$	c. $5e^{5x-1}$	d. $5xe^{5x-1}$
---------------	--------------	----------------	-----------------

On sait que $(e^u)' = u' \times e^u$. Avec $u(x) = 5x - 1$, $u'(x) = 5$, donc $f'(x) = 5e^{5x-1}$. **Réponse c.**

Question 4

Dans un repère orthonormé, la droite passant par A(4; 7) et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a pour équation :

a. $3x + y - 19 = 0$	b. $3x + y + 19 = 0$	c. $-x + 3y + 17 = 0$	d. $-x + 3y - 17 = 0$
----------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------

Soit d la droite dont on cherche l'équation.

$M(x; y) \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Avec $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-4 \\ y-7 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, on obtient :

$M(x; y) \in (d) \iff -(x-4) + 3(y-7) = 0 \iff -x + 3y - 17 = 0$.

Réponse d.

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère l'équation de cercle $x^2 - 4x + (y+3)^2 = 3$.

Son centre a pour coordonnées :

a. (-2 ; -3)	b. (2 ; -3)	c. (-4 ; 3)	d. (4 ; -3)
--------------	-------------	-------------	-------------

$x^2 - 4x + (y+3)^2 = 3 \iff (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 = 3 \iff (x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 7$.

On a donc $CM^2 = 7$, avec C(2 ; -3).

Réponse b.

Exercice 2 :

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2 + 2x + 1 > 0$, où x est un nombre réel, est :
 Pour le trinôme $-3x^2 + 2x + 1$, le réel 1 est une racine évidente et comme le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{1}{-3}$, l'autre racine est $-\frac{1}{3}$.

On sait que ce trinôme est du signe de $a = -3 < 0$, donc négatif, sauf (ce que nous cherchons) sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3} ; 1 \right[$. **Réponse c.**

2. On a $M(x ; y) \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc si $-2(x - (-1)) = 3(y - 5) \iff -2x - 2 = 3y - 15 \iff -2x - 3y + 13 = 0$. **Réponse d.**

3. Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

Sur l'intervalle $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - 1(2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-2x-1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}. \quad \text{Réponse d.}$$

4. $\frac{(e^x)^2 \times e^{-x+1}}{e^{5x}} = e^{x^2-x+1-5x} = e^{x^2-6x+1}$. **Réponse b.**

5. La fonction f est définie pour tout x réel par

$$f(x) = e^x (3e^x - 1).$$

Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x (3e^x - 1) + e^x \times 3e^x = e^x (3e^x - 1 + 3e^x) = e^x (6e^x - 1) = 6e^{2x} - e^x$. **Réponse b.**

Exercice 3 :

Question 1

$$\frac{e^{5x}}{e^{2x-2}} =$$

a. e^{3x+2}	b. e^{3x-2}	c. $e^{2,5x-2,5}$	d. e^{7x-2}
---------------	---------------	-------------------	---------------

$$\frac{e^{5x}}{e^{2x-2}} = e^{5x-2x+2} = e^{3x+2}. \quad \text{Réponse a.}$$

Question 2

Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 2 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a. $u_3 = 7$	b. $u_3 = 10$	c. $u_3 = 28$	d. $u_3 = 4$
--------------	---------------	---------------	--------------

$$u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4; u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10; u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28. \quad \text{Réponse c.}$$

Question 3

Dans un atelier 3 % des pièces produites sont défectueuses. On constate qu'au cours du contrôle qualité, si la pièce est bonne, elle est acceptée dans 95 % des cas, et que si elle est défectueuse, elle est refusée dans 98 % des cas.

La probabilité qu'une pièce soit refusée est égale à :

a. 0,0779	b. 0,0294	c. 0,0485	d. 0,98
-----------	-----------	-----------	---------

La probabilité qu'une pièce soit refusée est égale à : $0,97 \times 0,05 + 0,03 \times 0,98 = 0,0779$.

Question 4

Sachant que $\cos x = \frac{5}{13}$ et que x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, la valeur de $\sin x$ est : **Réponse d.**

a. $\frac{8}{13}$	b. $-\frac{8}{13}$	c. $\frac{12}{13}$	d. $-\frac{12}{13}$
-------------------	--------------------	--------------------	---------------------

On sait qu'alors $\sin x < 0$, donc $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{169-25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Question 5

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	-2	0	5
$p_i = P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

L'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à :

a. 3	b. 0,9	c. 0,4	d. 0,5
------	--------	--------	--------

$E(X) = -2 \times 0,3 + 0 \times 0,5 + 5 \times 0,2 = -0,6 + 1 = 0,4$.

Réponse c.

Exercice 4 :

1. On constate avec les deux points de la tangente de coordonnées (2; 2) et (5; 4) que celle a un coefficient directeur égal à $f'(2) = \frac{4-2}{5-2} = \frac{2}{3}$.

Une équation de cette tangente est :

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2), \text{ soit } y - 2 = \frac{2}{3}(x - 2) \text{ ou } y = \frac{2}{3}(x - 2) + 2.$$

2.

On voit que si A correspond à l'arc de mesure α , alors $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ donc $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

3. $f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$. Ce trinôme a donc deux racines : 0 et $-\frac{b}{a} < 0$ car a et b sont tous les deux supérieurs à zéro. Donc réponse d.

4. La droite D a un vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{d} \cdot \vec{u} = 2 - 2 = 0$: les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : réponse b.

5. Les distances parcourues chaque jour sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 12 (km) et de raison $-0,5$ (km).

Si d_n est la distance parcourue le n -ième jour, on sait que $d_n = 12 - 0,5(n - 1)$.

Il faut trouver :

$S_{10} = 12 + 11,5 + 11 + \dots + 12 - 4,5$ que l'on peut écrire :

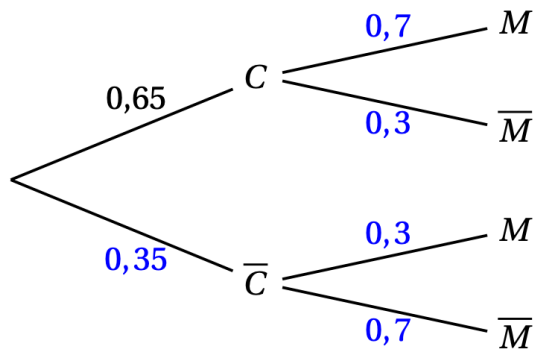
$S_{10} = 12 - 4,5 + 12 - 4 + \dots + 12$. En sommant membre à membre :

$2S_{10} = 10 \times (24 - 4,5) = 240 - 45 = 195$, d'où $S_{10} = 97,5$.

PARTIE 2 : PROBABILITES

Exercice 1 :

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. $p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M) = 0,65 \times 0,7 = 0,455$.

3. On a de même $p(\bar{C} \cap M) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(M) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$.

D'après la loi des probabilités totales :

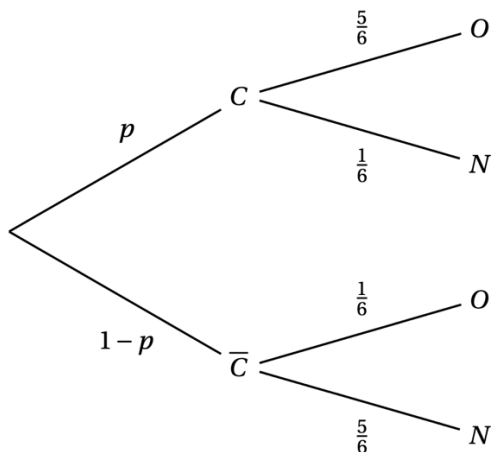
$$p(M) = p(C \cap M) + p(\bar{C} \cap M) = 0,455 + 0,105 = 0,56.$$

4. On doit calculer $p_M(C) = \frac{p(M \cap C)}{p(M)} = \frac{p(C \cap M)}{p(M)} = \frac{0,455}{0,56} = 0,8125$.

Exercice 2 :

1. Un lycéen ne va répondre « oui » lorsqu'il n' a jamais consommé de cannabis que s'il a tiré un 6 au lancer de dé, soit dans un cas sur 6. Cette probabilité est donc égale à $\frac{1}{6}$.

2.



3. a. • On a $p(C \cap O) = p(C) \times p_C(O) = p \times \frac{5}{6} = \frac{5p}{6}$;

• De même $p(\bar{C} \cap O) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(O) = (1 - p) \times \frac{1}{6} = \frac{1 - p}{6}$.

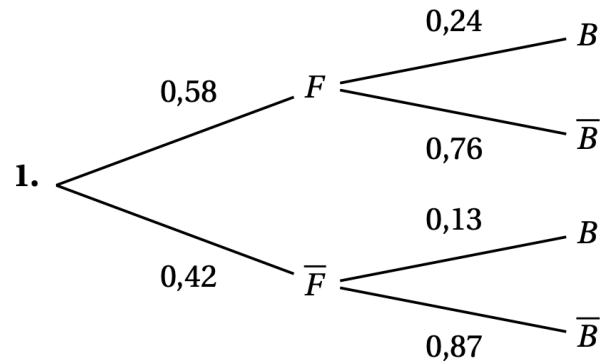
D'après la loi des probabilités totales :

$$p(O) = p(C \cap O) + p(\bar{C} \cap O) = \frac{5p}{6} + \frac{1 - p}{6} = \frac{4p}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{5} \iff \frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b. } \frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5} \iff \frac{2}{3}p = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \iff \frac{2}{3}p = \frac{18}{30} - \frac{5}{30} \iff \frac{2}{3}p = \frac{13}{30} \iff p = \frac{3}{2} \times \frac{13}{30} = \frac{13}{20} = \frac{65}{100} = 0,65 = p.$$

$$4. \text{ On calcule } p_N(\bar{C}) = \frac{p(N \cap \bar{C})}{p(N)} = \frac{p(\bar{C} \cap N)}{p(N)} = \frac{0,35 \times \frac{5}{6}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{1,75}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{1,75}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{8,75}{12} = \frac{35}{48}.$$

Exercice 3 :



$$2. \text{ On a } p(F \cap B) = p(F) \times p_F(B) = 0,58 \times 0,24 = 0,1392.$$

3. D'après la loi des probabilités totales :

$$p(B) = p(B \cap F) + p(B \cap \bar{F}).$$

$$\text{Or } p(B \cap \bar{F}) = p(\bar{F} \cap B) = p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(B) = 0,42 \times 0,13 = 0,0546.$$

$$\text{Donc } p(B) = 0,1392 + 0,0546 = 0,1938.$$

4. a. $X = 65$ correspond à l'évènement $F \cap B$ de probabilité 0,1392 ;
 $X = 40$ correspond à l'évènement $F \cap \bar{B}$ de probabilité $0,58 - 0,1392 = 0,4408$;
 $X = 85$ correspond à l'évènement $\bar{F} \cap \bar{B}$ de probabilité 0,0546 ;
 $X = 60$ correspond à l'évènement $\bar{F} \cap B$ de probabilité $0,42 - 0,0546 = 0,3654$. D'où le tableau :

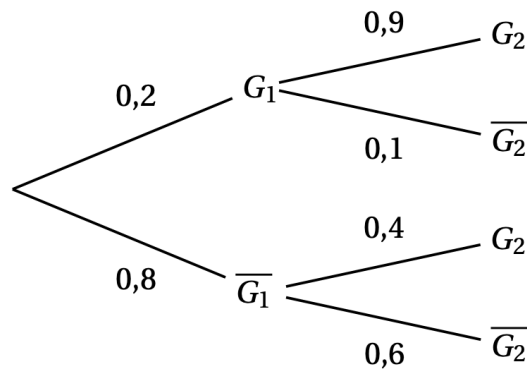
$X = x_i$	40	60	65	85
$p(X = x_i)$	0,4408	0,3654	0,1392	0,0546

- b. On a $E(X) = 40 \times 0,4408 + 60 \times 0,3654 + 65 \times 0,1392 + 85 \times 0,0546 = 53,245 \approx 53,25$ (€).
 Sur un grand nombre de clients, la dépense moyenne par client sera de 53,25 (€).

Exercice 4 :

Partie A

1.



2. On a $p(G_1 \cap G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$.

3. On a de même : $p(\overline{G_1} \cap G_2) = p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$.

Donc d'après la loi des probabilités totales :

$$p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,18 + 0,32 = 0,5.$$

Partie B

1.	Valeurs de X	-2	0,5	3	Total
	Probabilité	0,48	0,34	0,18	1

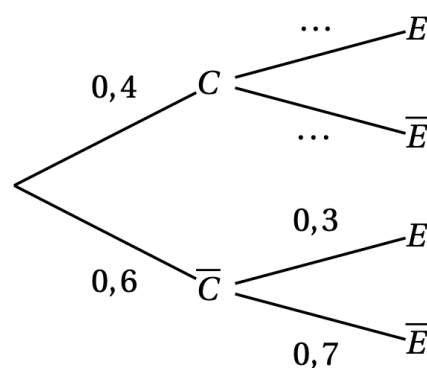
2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égale à :

$$E(X) = -2 \times 0,48 + 0,5 \times 0,34 + 3 \times 0,18 = -0,96 + 0,17 + 0,54 = -0,25.$$

Ceci signifie que sur un grand nombre de parties, un joueur perdra en moyenne 25 centimes par partie. Le jeu n'est donc pas équitable.

Exercice 5 :

1. On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



- On a $P(C) = 0,40$;
- L'énoncé donne $P(C \cap E) = 0,24$;
- L'énoncé donne également $P_{\overline{C}}(E) = 0,30$.

2. On a $P(\overline{C} \cap \overline{E}) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(\overline{E}) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

3. On a $P(C) \times P_C(E) = 0,4 \times P_C(E) = 0,24$.

On en déduit que $P_C(E) = \frac{0,24}{0,4} = \frac{6}{10} = 0,6$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(E) = P(E \cap C) + P(E \cap \overline{C}) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,3 = 0,24 + 0,18 = 0,42.$$

4. Les événements C et E sont-ils indépendants?

On a $P(C \cap E) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$ et

$$P(C) \times P(E) = 0,4 \times 0,42 = 0,168.$$

Comme $P(C \cap E) \neq P(C) \times P(E)$, on en déduit que les événements C et E ne sont pas indépendants.

PARTIE 3 : SUITES

Exercice 1 :

1. Augmenter de 5 % c'est multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1 + 0,05 = 1,05$.

- $u_1 = u_0 \times 1,05 = 416 \times 1,05 = 436,8 \approx 437$.

- $u_2 = u_1 \times 1,05 = 436,8 \times 1,05 = 458,64 \approx 459$.

2. Quel que soit le naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 1,05$: cette égalité montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $u_0 = 416$.

3. On sait qu'alors quel que soit le naturel n , $u_n = u_0 \times 1,05^n = 416 \times 1,05^n$.

4. On a donc en particulier : $u_7 = 416 \times 1,05^7 \approx 585,4$, soit environ 585.

5. Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient : $u_{10} < 700 < u_{11}$ donc le nombre d'adhérents dépassera 700 en 2018+11 soit 2029.

Exercice 2 :

1. Montrer que $u_1 = 5\,150$ et $u_2 = 5\,304,5$.

Ajouter 3% d'intérêts c'est multiplier par $1 + 0,03 = 1,03$, donc :

- $u_1 = 5000 \times 1,03 = 5\,150$;

- $u_2 = 5\,150 \times 1,03 = 5\,304,50$ (€).

2. a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.

On a vu que $u_{n+1} = 1,03u_n$: la suite (u_n) est donc géométrique de raison 1,03 et de premier terme 5 000.

b. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .

On sait que $u_n = 5000 \times 1,03^n$.

3. Calculer le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.

On a $u_{18} = 5000 \times 1,03^{18} \approx 8512,17$ (€).

4. Si Lisa n'utilise pas le capital dès ses 18 ans, quel âge aura-t-elle quand celui-ci dépassera 10 000 euros?

Il faut donc trouver n tel que :

$$5000 \times 1,03^n \geq 10000 \iff 1,03^n \geq 2.$$

La calculatrice donne $n \geq 23$. Lisa aura 23 ans lorsque son capital aura doublé.

Exercice 3 :

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de 3,7 % chaque année.

On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $2000 + n$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'année à partir de l'an 2000.

Ainsi, $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

Ajouter 3,7 %, c'est multiplier par $1 + \frac{3,7}{100} = 1 + 0,037 = 1,037$.

On a donc pour tout naturel n , $u_{n+1} = 1,037u_n$: la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 187$ et de raison 1,037.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n .

On sait qu'alors qu'avec q comme raison $u_n = u_0 \times q^n$, que que soit le naturel n .

Ici $u_n = 187 \times 1,037^n$.

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,037$ soit $q > 1$, elle est donc croissante.

4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.

2019 correspond à $n = 19$, donc $u_{19} = 187 \times 1,037^{19} \approx 372,9$, donc environ 373 millions au million près.

5. Des études montrent que 20 % de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70 % de ces déchets finissent par couler.

Montrer que la quantité totale, arrondie au million de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

Sur les 20 % de plastiques allant à la mer, 30 % flottaient en 2000, soit : 6 %.

La production totale de plastiques de 2000 à 2019 est :

$S_{2019} = u_0 + 1,037u_0 + \dots + 1,037^{19}u_0$, donc :

$$S_{2019} = u_0 \times \frac{1 - 1,037^{20}}{1 - 1,037} = 187 \times \frac{1 - 1,037^{20}}{1 - 1,037} \approx 5398,32$$

Il reste donc en surface : $S_{2019} \times 0,06 \approx 323,89$ soit environ 324 millions de tonnes au million près.

Exercice 4 :

1. On a $a_1 = a_0 \times 0,8 + 400 = 0,8 \times 2500 + 400 = 2000 + 400 = 2400$;
De même $a_2 = 0,8a_1 + 400 = 0,8 \times 2400 + 400 = 2320$.
2.
 - a. Pour passer de a_n à a_{n+1} on multiplie par 0,8 puis on ajoute 400.
Donc pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.
Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = a_{n+1} - 2000$ soit
 $v_{n+1} = 0,8a_n + 400 - 2000 = 0,8a_n - 1600 = 0,8(a_n - 2000)$, soit finalement :
 $v_{n+1} = 0,8v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500$.
 - b. On sait que, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times 0,8^n = 500 \times 0,8^n$
 - c. Or $v_n = a_n - 2000 \iff a_n = 2000 + v_n = 2000 + 500 \times 0,8^n$.
 - d. Il faut trouver le plus petit naturel n , tel que $a_n \leq 2010$ ou $2000 + 500 \times 0,8^n \leq 2010 \iff$
 $500 \times 0,8^n \leq 10 \iff 0,8^n \leq \frac{10}{500} \iff 0,8^n \leq \frac{20}{1000}$ soit enfin
 $0,8^n \leq 0,02$: la calculatrice donne $n = 18$ pour lequel $a_{18} \approx 2009,01$ soit en 2031.

Exercice 5 :

1. Diminuer de 5 %, c'est multiplier la quantité de déchets par $1 - \frac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$.
Donc l'entreprise s'engage à produire seulement en 2020 :
 $6000 \times 0,95 = 5970$ (tonnes).
2.
 - a. On a donc pour tout naturel n , $d_{n+1} = 0,95d_n$.
 - b. La relation précédente montre que la suite (d_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $d_0 = 6000$.
 - c. On sait que pour tout naturel n , $d_n = d_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.
La quantité totale de déchets de 2019 à 2023 est :
 $T = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4$, soit :
 $T = d_0 \times \frac{1 - 0,95^5}{1 - 0,95} = 6000 \times \frac{1 - 0,95^5}{0,05} \approx 27146$
- 3.

$D \leftarrow 6000$
 $N \leftarrow 0$
Tant que $D > 3600$
 $D \leftarrow 0,95 * D$
 $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

L'algorithme donnera $N = 10$, soit en 2029.

PARTIE 4 : ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1 :

1. Si la tangente est horizontale le nombre dérivé $f'(1)$ est nul.
2. Cette tangente est la droite (AC), donc son équation est $-x + y = 2$ ou $y = x + 2$.

On admet que cette fonction f est définie sur $[-10 ; 2]$ par

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

3. f est un produit de fonctions dérivables sur $[-10 ; 2]$ et sur cet intervalle,
 $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = e^x(-1 + 2 - x) = e^x(1 - x)$.
4. On sait que quel que soit le réel x $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
 - $1 - x > 0 \iff 1 > x$: sur l'intervalle $[-10 ; 1[$ la fonction f est croissante de $f(-10) = 12e^{-10} \approx 0,0005$ à $f(1) = e^1 \approx 2,728$;
 - $1 - x < 0 \iff 1 < x$: sur l'intervalle $[1 ; 2[$ la fonction f est décroissante de $f(1) = e^1 \approx 2,728$ à $f(2) = 0$;
 - $1 - x = 0 \iff 1 = x$: $f(1)$ est le maximum de f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
5. Si Δ est cette tangente on sait qu'une équation de celle-ci est :
 $M(x ; y) \in (\Delta) \iff y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.
Avec $f(2) = 0$ et $f'(2) = -e^2$, l'équation devient :
 $M(x ; y) \in (\Delta) \iff y = -e^2(x - 2)$ ou $y = e^2(2 - x)$.

Exercice 2 :

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.
 $P(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 2 + 1)(x + 2 - 1) = (x + 3)(x + 1)$.
On sait que $P(x) \geq 0$, sauf sur l'intervalle $] -3 ; -1[$ (-3 et -1) étant les racines du trinôme..

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -2 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x + 2)^2}$$

où f' est la fonction dérivée de f .

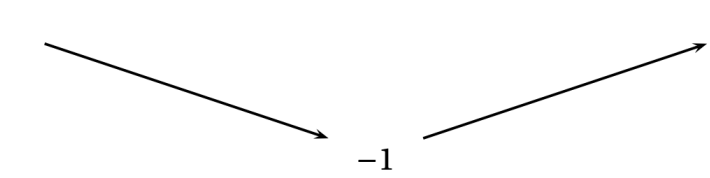
Pour $x > -2$, f est dérivable et sur $] -2 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 2) - (x^2 + x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x + x + 2 - x^2 - x + 1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = \frac{P(x)}{(x + 2)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$.

Comme $(x+2)^2 > 0$ sur $] -2 ; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $P(x)$ étudié à la question 1.

Donc sur $] -2 ; -1[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante et sur $] -1 ; +\infty[$ la fonction f est croissante.

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	$-$	$+$	
f			

4. Donner le minimum de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

D'après la question précédente $f(-1) = \frac{1-1-1}{-1+2} = -1$ est le minimum de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$.

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est le nombre

$$\text{dérivé } f'(2) = \frac{4+8+3}{(2+2)^2} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

Exercice 3 :

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0; 9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.

La longueur est égale à $24 - 2x$ et la largeur $18 - 2x$. La hauteur valant x , le volume de la boîte sans couvercle est égale à :

$$V(x) = L \times l \times h = (24 - 2x)(18 - 2x) \times x = x(532 - 48x - 36x + 4x^2) = 4x^3 - 84x^2 + 432x.$$

2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0; 9]$.

Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x .

La fonction polynôme V est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 9]$, $V'(x) = 12x^2 - 168x + 432 = 12(x^2 - 14x + 36)$.

3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.

Avec $\Delta = 14^2 - 4 \times 36 = 196 - 144 = 52$, le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{14 + \sqrt{52}}{2} = 7 + \sqrt{13} \text{ et } x_2 = \frac{14 - \sqrt{52}}{2} = 7 - \sqrt{13}.$$

On sait que ce trinôme est positif sauf sur $]7 - \sqrt{13}; 7 + \sqrt{13}[$. Comme $\sqrt{13} \approx 3,6$, $7 + \sqrt{13} \approx 10,6$.

- sur $]7 - \sqrt{13}; 7 + \sqrt{13}[$, $V'(x) < 0$, donc V est décroissante;
- sur $[0; 7 - \sqrt{13}]$ et sur $[7 + \sqrt{13}; 9]$, $V'(x) > 0$, donc V est croissante.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale?

D'après la question précédente $V(7 - \sqrt{13}) \approx 654,977 \approx 655 \text{ cm}^3$ est la contenance maximale de la boîte.

5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Oui puisque la capacité maximale est proche de 655. Pour avoir une capacité de 650 cm^3 , il faut prendre $x \approx 3,06 \text{ cm}$.

Exercice 4 :

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2 , est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0; 5]$.

Pour $x \in [0; 5]$, on a $OA = x$ et $OC = f(x) = 4e^{-0,5x}$. On a donc $\mathcal{A}(OABC) = x \times f(x) = 4xe^{-0,5x}$.

2. La fonction g est dérivable sur $[0; 5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.

Pour $x \in [0; 5]$, on a $g'(x) = 4e^{-0,5x} + 4xe^{-0,5x} \times (-0,5) = 4e^{-0,5x} - 2xe^{-0,5x} = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0; 5]$.

On sait que quel que soit le réel a , $e^a > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $4 - 2x$.

- $4 - 2x > 0 \iff 4 > 2x \iff x < 2$; sur l'intervalle $[0; 2]$, la dérivée est positive, donc la fonction g est croissante de $g(0) = 0$ à $g(2) = 8e^{-1} \approx 2,943$;
- $4 - 2x < 0 \iff 4 < 2x \iff x > 2$; sur l'intervalle $[2; 5]$, la dérivée est négative, donc la fonction g est décroissante de $g(2) = 8e^{-1}$ à $g(5) = 20e^{-2,5} \approx 1,642$;
- $4 - 2x = 0 \iff 4 = 2x \iff x = 2$; $g(2) \approx 2,943$ est le maximum de la fonction sur l'intervalle $[2; 5]$.

4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale?

Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2 .

D'après la question précédente l'enclos aura une surface maximale pour $x = 2$ et on a vu que $g(2) \approx 2,943$, soit $2,94 \text{ m}^2$ au dm^2 près.

PARTIE 5 : PRODUIT SCALAIRE ET APPLICATIONS

Exercice 1 :

1. Les droites (TD) et (AB) sont perpendiculaires, les vecteurs $\overrightarrow{TD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont donc orthogonaux : leur produit scalaire est donc nul.

2. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = (\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DA}) \cdot \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{TB}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{TD} = TD^2 = 324.$$

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = (7, 32 + 9) \times 9 = 146,88.$$

$$\text{Finalement : } \overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 324 + 146,88 = 470,88$$

3. Méthode 1 :

$$\text{On sait que } \overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = TA \times TB \times \cos \widehat{ATB} \quad (1).$$

Or d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle TDB rectangle en D, on a :

$$AT^2 = AD^2 + DT^2 = 16,32^2 + 18^2 = 590,3424.$$

L'égalité (1) s'écrit donc :

$$470,88 = \sqrt{405} \times \sqrt{590,3424} \times \cos \widehat{ATB}, \text{ d'où :}$$

$$\cos \widehat{ATB} = \frac{470,88}{\sqrt{405} \times \sqrt{590,3424}} \approx 0,96301.$$

La calculatrice donne $\widehat{ATB} \approx 15,63$, soit $\widehat{ATB} \approx 15,6^\circ$ au dixième près.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé on considère le point $A(-3 ; 5)$ et la droite (d) dont une équation cartésienne est $-x + 3y + 2 = 0$.

1. Avec comme équation $x = 3y + 2$, on trouve aisément le point $B(2 ; 0)$ et le point $C(-4 ; -2)$ appartenant à la droite (d) .

2. Un vecteur directeur de la droite (d) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est par exemple $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Si δ est la perpendiculaire à (d) contenant A, on a :

$$M(x ; y) \in \delta \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires soit}$$

$$M(x ; y) \in \delta \iff -3(x - (-3)) = 1(y - 5) \iff 3x + 9 = y - 5 \iff 3x - y + 14 = 0.$$

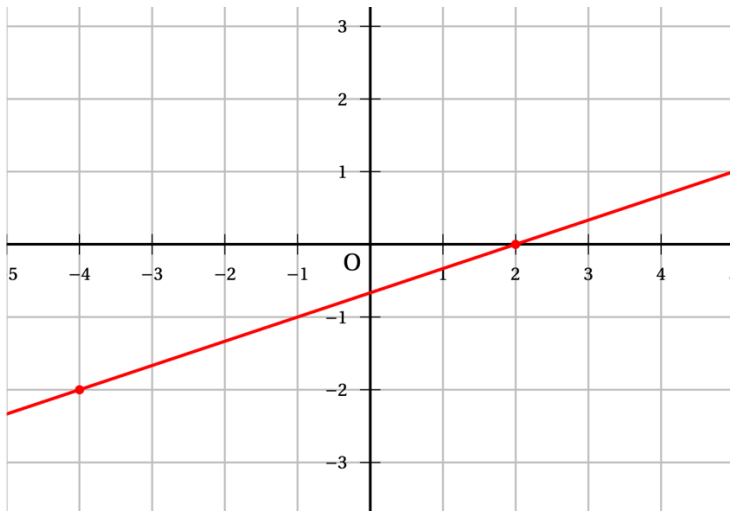
4. Le projeté orthogonal de A sur la droite (d) est donc le point commun (d) et δ . Or :

$$M(x ; y) \in (d) \cap \delta \iff \begin{cases} -x + 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 14 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y + 2 = x \\ 3x - y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(3y + 2) - y + 14 = 0 \iff 9y + 6 - y + 14 = 0 \iff 8y = -20 \iff y = -\frac{5}{2}, \text{ puis } x = 3y + 2 = 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 = -\frac{15}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{11}{2}.$$

Donc $H\left(-\frac{11}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$.

5. La distance entre le point A et la droite (d) est égale à AH.

$$\text{On a } AH^2 = \left(-\frac{11}{2} + 3\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} - 5\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{225}{4} = \frac{250}{4}, \text{ d'où } AH = \sqrt{\frac{250}{4}} = \frac{\sqrt{250}}{2}.$$



Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points A (2 ; -1), B(0 ; 3) et C(3 ; 1).

1. a. Avec $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 4 \times 2 = -2 + 8 = 6.$$

b. $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 + 16 = 20$, d'où $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 4 = 5, \text{ d'où } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5}.$$

- c. On peut également écrire le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}), \text{ soit :}$$

$$6 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} \cos(\widehat{BAC}), \text{ d'où } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ au degré près.}$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 53,1$, soit 53° au degré près.

2. a. Une équation de la droite (AB) étant $y = ax + b$ alors on a le système :

$$\begin{cases} -1 &= 2a + b \\ 3 &= 0 \times a + b \end{cases}, \text{ d'où } b = 3 \text{ et par différence } -4 = 2a \text{ ou } a = -2.$$

$$\text{Donc } M(x; y) \in (AB) \iff y = -2x + 3 \iff 2x + y - 3 = 0.$$

- b. Si $H(x; y)$, on a $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et ces coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} H \in (AB) \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3 &= 0 \\ -2(x-3) + 4(y-1) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3 &= 0 \\ -2x + 6 + 4y - 4 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y - 3 &= 0 \\ -2x + 4y + 2 &= 0 \end{cases}, \text{ d'où par somme } 5y - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{5} \text{ et en utilisant la}$$

$$\text{première équation } 2x + \frac{1}{5} - 3 = 0 \iff 2x = \frac{15}{5} - \frac{1}{5} = \frac{14}{5} \iff x = \frac{7}{5}.$$

$$H\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right).$$

Exercice 4 :

- Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre [AB].

- Équation de (BD) = B et D sont deux points dont les coordonnées sont égales : une équation de la droite (BD) est donc $y = x$.
- Équation du cercle C de diamètre [AB] donc de centre I(0; 3).
 $M(x; y) \in C \iff IM^2 = 3^2 \iff (x-0)^2 + (y-3)^2 = 9 \iff x^2 + y^2 - 6y = 0$.

- Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne

$$x + y - (1 + \sqrt{5}) = 0.$$

$$M(x; y) \in (EH) \iff \overrightarrow{EM} \text{ et } \overrightarrow{DB} \text{ sont orthogonaux donc si } \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{EM} \left(\begin{matrix} x-(-2) \\ y-(3+\sqrt{5}) \end{matrix} \right) \text{ et } \overrightarrow{DB} \left(\begin{matrix} 3-(-3) \\ 3-(-3) \end{matrix} \right), \text{ on a donc :}$$

$$\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DB} = 6(x+2) + 6(y-3-\sqrt{5}) = 0 \iff x+2+y-3-\sqrt{5} = 0 \iff x+y-(1+\sqrt{5}) = 0.$$

- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).

H est le point commun aux droites perpendiculaires (EH) et (BD); ses coordonnées x et y vérifient donc les équations de ces deux droites, donc le système :

$$\begin{cases} x + y - (1 + \sqrt{5}) = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \text{ d'où par somme}$$

$$2y = 1 + \sqrt{5} \iff y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et puisque } x = y, H \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

- Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).

- $BD = 6\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 6);

- $\overrightarrow{EH} \left(\begin{matrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} - (-2) \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} - (3+\sqrt{5}) \end{matrix} \right)$, soit $\overrightarrow{EH} \left(\begin{matrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-5}{2} \end{matrix} \right)$.

$$\text{Donc } EH^2 = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-5}{2} \right)^2 = \frac{25 + 5 + 10\sqrt{5} + 25}{4} = \frac{55 + 10\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Donc } EH = \frac{\sqrt{55 + 10\sqrt{5}}}{2}.$$

$$\text{Finalement : } \mathcal{A}(BDE) = \frac{DB \times EH}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{55 + 10\sqrt{5}}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{55 + 10\sqrt{5}}}{2} \approx 18,7 \text{ unités d'aire.}$$

- Montrer que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 42 + 6\sqrt{5}$.

On admet que $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{42 + 12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BDE}$ au degré près.

$$\text{On a } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DH}.$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{DH} \left(\begin{matrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 3 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 3 \end{matrix} \right) \text{ ou } \overrightarrow{DH} \left(\begin{matrix} \frac{7+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{7+\sqrt{5}}{2} \end{matrix} \right).$$

$$\text{D'où on calcule } DH^2 = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{49+5+14\sqrt{5}+49+5+14\sqrt{5}}{4} = \frac{108+28\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Donc } DH = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \times \sqrt{2}.$$

$$\text{Finalement : } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 6\sqrt{2} \times \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \times \sqrt{2} = 6(7 + \sqrt{5}) = 42 + 6\sqrt{5}.$$

On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{DB}\| \times \|\overrightarrow{DE}\| \times \cos \widehat{BDE} \text{ ou}$$

$$42 + 6\sqrt{5} = 6\sqrt{2} \times \sqrt{42 + 12\sqrt{5}} \times \cos \widehat{BDE} \iff \cos \widehat{BDE} = \frac{42 + 6\sqrt{5}}{6\sqrt{2} \times \sqrt{42 + 12\sqrt{5}}} \approx 0,787.$$

La calculatrice donne $\widehat{BDE} \approx 38,1$, soit 38° au degré près.