



CAHIER DE VACANCES

ENTREE EN TERMINALE SPECIALITE MATHEMATIQUES

Table des matières

<i>PARTIE 1 : QCM (mélange de notions)</i>	3
Exercice 1 :	3
Exercice 2 :	4
Exercice 3 :	5
Exercice 4 :	6
<i>PARTIE 2 : PROBABILITES</i>	8
Exercice 1 :	8
Exercice 2 :	9
Exercice 3 :	10
Exercice 4 :	10
Exercice 5 :	11
<i>PARTIE 3 : SUITES NUMERIQUES</i>	12
Exercice 1 :	12
Exercice 2 :	12
Exercice 3 :	13
Exercice 4 :	13
Exercice 5 :	14
<i>PARTIE 4 : ETUDE DE FONCTIONS</i>	15
Exercice 1 :	15
Exercice 2 :	16
Exercice 3 :	16
Exercice 4 :	17
<i>PARTIE 5 : PRODUIT SCALAIRE ET APPLICATIONS</i>	18
Exercice 1 :	18
Exercice 2 :	18
Exercice 3 :	18
Exercice 4 :	19

PARTIE 1 : QCM (mélange de notions)

Exercice 1 :

Ce QCM comprend cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1

L'inéquation $e^{-2x} > 0$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions :

a. $\mathbb{R}$	b. $]0 ; +\infty[$	c. $] -\infty ; 0[$	d. $\emptyset$
-----------------	--------------------	---------------------	----------------

Question 2

Pour tout réel x , $(e^x - 1)^2$ est égal à :

a. $e^{2x} - 1$	b. $e^{2x} + 1$	c. $e^{2x} - 2e^x + 1$	d. $e^{(x^2)} - 1$
-----------------	-----------------	------------------------	--------------------

Question 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{5x-1}$.

Pour tout réel x , $f'(x)$ est égal à :

a. e^{5x-1}	b. $5e^{5x}$	c. $5e^{5x-1}$	d. $5xe^{5x-1}$
---------------	--------------	----------------	-----------------

Question 4

Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(4; 7)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a pour équation :

a. $3x + y - 19 = 0$	b. $3x + y + 19 = 0$	c. $-x + 3y + 17 = 0$	d. $-x + 3y - 17 = 0$
----------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère l'équation de cercle $x^2 - 4x + (y + 3)^2 = 3$.

Son centre a pour coordonnées :

a. $(-2 ; -3)$	b. $(2 ; -3)$	c. $(-4 ; 3)$	d. $(4 ; -3)$
----------------	---------------	---------------	---------------

Exercice 2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question une seule réponse est exacte.

Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

La bonne réponse rapporte un point.

Il n'est pas demandé de justification.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2 + 2x + 1 > 0$, où x est un nombre réel, est :

A. $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$

B. $\emptyset$

C. $\left]-\frac{1}{3}; 1\right[$

D. $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]1; +\infty[$.

2. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A de coordonnées $(-1; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ de coordonnées $(3; -2)$ est :

A. $-2x + 3y + 13 = 0$ B. $-2x - 3y - 13 = 0$ C. $2x - 3y + 13 = 0$ D. $-2x - 3y + 13 = 0$.

3. Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

La fonction dérivée de f est définie sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par :

A. $f'(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$ B. $f'(x) = \frac{3x-6}{(x-2)^2}$ C. $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ D. $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$.

4. Pour tout nombre réel x , une expression simplifiée de

$$\frac{(e^x)^2 \times e^{-x+1}}{e^{5x}}$$

est :

A. e^{-4x+1}

B. e^{x^2-6x+1}

C. e^{x^2+4x+1}

D. $e^{-x^3+x^5-5x}$.

5. La fonction f est définie pour tout x réel par

$$f(x) = e^x(3e^x - 1).$$

La fonction dérivée de f est définie pour tout x réel par :

A. $f'(x) = e^x(3e^x)$ B. $f'(x) = 6e^{2x} - e^x$ C. $f'(x) = 3e^{2x} - ex$ D. $f'(x) = 3(e^x)^2 - 1$.

Exercice 3 :

Ce QCM comprend cinq questions indépendantes.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question **sans réponse n'apporte ni ne retire de point.**

Question 1

$$\frac{e^{5x}}{e^{2x-2}} =$$

a. e^{3x+2}	b. e^{3x-2}	c. $e^{2,5x-2,5}$	d. e^{7x-2}
---------------	---------------	-------------------	---------------

Question 2

Soit la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 2 \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

a. $u_3 = 7$	b. $u_3 = 10$	c. $u_3 = 28$	d. $u_3 = 4$
--------------	---------------	---------------	--------------

Question 3

Dans un atelier 3 % des pièces produites sont défectueuses. On constate qu'au cours du contrôle qualité, si la pièce est bonne, elle est acceptée dans 95 % des cas, et que si elle est défectueuse, elle est refusée dans 98 % des cas.

La probabilité qu'une pièce soit refusée est égale à :

a. 0,0779	b. 0,0294	c. 0,0485	d. 0,98
-----------	-----------	-----------	---------

Question 4

Sachant que $\cos x = \frac{5}{13}$ et que x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, la valeur de $\sin x$ est :

a. $\frac{8}{13}$	b. $-\frac{8}{13}$	c. $\frac{12}{13}$	d. $-\frac{12}{13}$
-------------------	--------------------	--------------------	---------------------

Question 5

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	-2	0	5
$p_i = P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

L'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à :

a. 3	b. 0,9	c. 0,4	d. 0,5
------	--------	--------	--------

Exercice 4 :

Ce QCM comprend 5 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des réponses proposées est exacte.

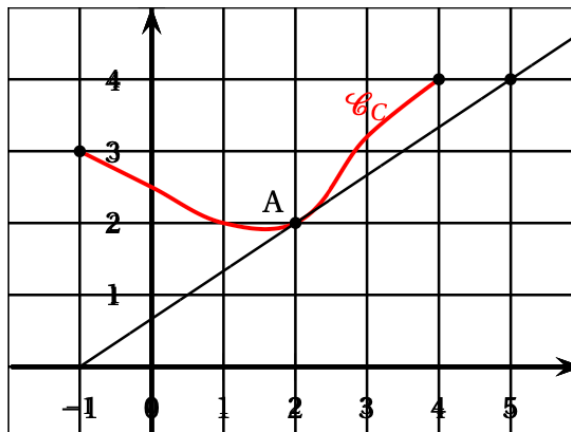
Indiquer pour chaque question sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une absence de réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 4]$.

On a tracé sur la figure ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à cette courbe au point A de coordonnées $(2 ; 2)$.

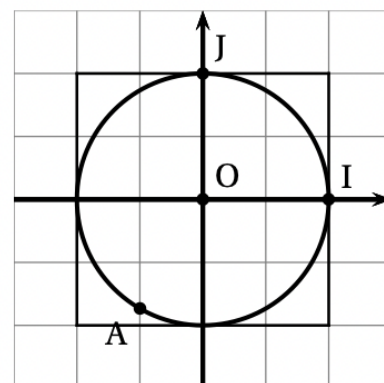


L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$y = \frac{2}{3}(x - 2) + 2$	$y = 2(x - 2) + \frac{2}{3}$	$y = \frac{2}{3}(x + 2) + 2$	$y = \frac{3}{2}(x - 2) + 2$

2.

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le point A, placé ci-contre sur le cercle trigonométrique de centre O, d'origine I, est associé au réel :



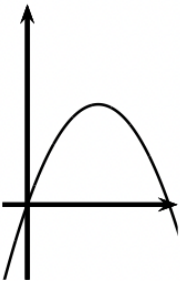
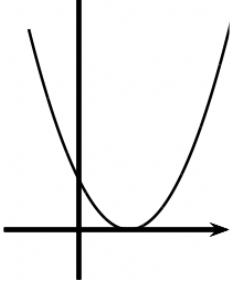
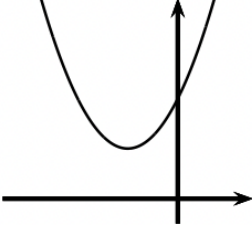
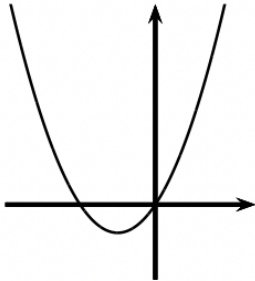
Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$

3. On considère une fonction du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx$$

où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

Quelle est la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé?

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
			

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé une droite D a pour équation : $x - 2y = 1$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte?

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D .	Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite D	Le point A de coordonnées $(1 ; -2)$ appartient à la droite D	L'ordonnée à l'origine de la droite D est égale à 1.

5. Un homme marche pendant 10 jours. Le premier jour, il parcourt 12 km. Chaque jour, il parcourt 500 m de moins que la veille. Durant ces dix jours, il aura parcouru au total :

Réponse a	Réponse b	Réponse c 19 km	Réponse d 84 km
95 km	97,5 km	19 km	84 km

PARTIE 2 : PROBABILITES

Exercice 1 :

Une résidence de vacances propose uniquement deux formules :

- la formule « pension complète » dans laquelle 3 repas par jour sont fournis;
- la formule « demi-pension » dans laquelle sont fournis uniquement le petit déjeuner et le dîner.

Pour l'année 2018, 65 % des clients ont choisi la pension complète ; les autres ont choisi la formule « demi-pension ».

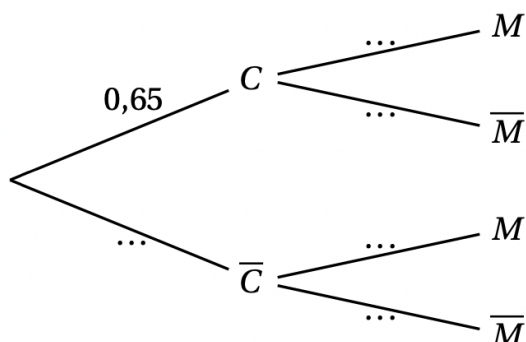
Parmi les clients qui ont choisi la demi-pension, 30 % ont réservé l'option « ménage » en fin de semaine.

De plus, 70 % des clients qui ont choisi la pension complète ont réservé l'option « ménage ».

On choisit un client au hasard parmi ceux de l'année 2018 et l'on considère les événements suivants :

- C : le client a choisi la formule « pension complète »;
- M : le client a choisi l'option « ménage ».

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Calculer $p(C \cap M)$.
3. Montrer que la probabilité que le client ait réservé l'option « ménage » est égale à 0,56.
4. Calculer la probabilité que le client ait choisi la formule « pension complète » sachant qu'il a réservé l'option « ménage ».
5. Voici la grille de tarifs de la résidence de vacances pour l'année 2018 :

Une semaine de pension complète	800 €
Une semaine de demi-pension	650 €
Option « ménage »	50 €

On note X la variable aléatoire égale au montant payé par un client de 2018.

Calculer $p(X = 850)$.

Exercice 2 :

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant :

Chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer. À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis? », l'adolescent doit répondre :

- « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis;
- « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis;
- « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

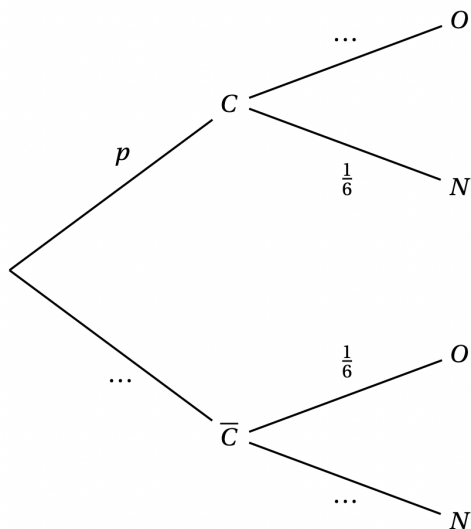
- N : l'évènement l'adolescent a répondu « non »;
- O : l'évènement l'adolescent a répondu « oui »;
- C : l'évènement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis;
- $\bar{C}$: l'évènement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $p(O) = \frac{3}{5}$.

On veut déterminer la probabilité, notée p , qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis.

On a donc $p(C) = p$.

1. Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.
2. Compléter ci-dessous l'arbre de probabilités représentant la situation.



3. a. Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation :

$$\frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}.$$

- b. En déduire la valeur de p .

4. Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis?

Exercice 3 :

Un parfumeur propose l'un de ses parfums, appelé « Fleur Rose », et cela uniquement avec deux contenances de flacons : un de 30ml ou un de 50ml. Pour l'achat d'un flacon « Fleur Rose », il propose une offre promotionnelle sur un autre parfum appelé « Bois d'ébène ».

On dispose des données suivantes :

- 58 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 30ml et, parmi ceux là, 24 % achètent également un flacon du parfum « Bois d'ébène » ;
- 42 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 50ml et, parmi ceux là, 13 % achètent également un flacon du parfum « Bois d'ébène ».

On admet qu'un client donné n'achète qu'un seul flacon de parfum « Fleur de Rose » (soit en 30ml soit en 50ml), et que s'il achète un flacon du parfum « Bois d'ébène », il n'en achète aussi qu'un seul flacon.

On choisit au hasard un client achetant un flacon du parfum « Fleur Rose ». On considère les événements suivants :

- F : « le client a acheté un flacon « Fleur Rose » de 30ml » ;
- B : « le client a acheté un flacon « Bois d'ébène ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'exercice.
2. Calculer la probabilité $p(F \cap B)$.
3. Calculer la probabilité que le client ait acheté un flacon « Bois d'ébène ».
4. Un flacon « Fleur Rose » de 30ml est vendu 40 €, un flacon « Fleur Rose » de 50ml est vendu 60 € et un flacon « Bois d'ébène » 25 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au montant total des achats par un client du parfum « Fleur Rose ».

- a. Déterminer la loi de probabilité de X .
- b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 :

Maxime participe à un jeu qui se déroule en deux parties :

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2.
- S'il gagne la première partie, il gagne la deuxième avec une probabilité de 0,9.
- S'il perd la première partie, il perd la suivante avec une probabilité de 0,6.

On note :

- G_1 l'évènement « Maxime gagne la première partie »
- G_2 l'évènement « Maxime gagne la première partie »

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que Maxime gagne les deux parties du jeu.
3. Montrer que la probabilité que Maxime gagne la deuxième partie du jeu est 0,5.

Partie B

On sait de plus que :

- à chaque partie gagnée, le joueur gagne 1,50 €.
- à chaque partie perdue, il perd 1 €.

On note X la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique en euros de Maxime à l'issue des deux parties.

1. Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Valeurs de X			3	Total
Probabilité			0,18	

2. Déterminer si ce jeu est équitable. Justifier.

Exercice 5 :

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

- une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 40 % des clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 30 % des clients demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 24 % des clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ».

On interroge un client au hasard.

On notera C l'évènement « Le client souhaite une "couleur-soin." ».

On notera E l'évènement « Le client souhaite un "effet coup de soleil." ».

1. Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_{\overline{C}}(E)$.
2. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».
3. Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à 0,42.
4. Les évènements C et E sont-ils indépendants?

PARTIE 3 : SUITES NUMERIQUES

Exercice 1 :

Le président d'un club de handball a constaté une augmentation du nombre d'adhérents dans son club depuis 2016 (toutes catégories confondues). En effet en 2016, il y avait 377 adhérents, 396 en 2017 et 416 en 2018. Ce qui correspond à une hausse chaque année d'environ 5 %.

Il souhaite faire une estimation pour les années à venir, en supposant que cette hausse de 5 % par an se poursuit.

On modélise le nombre d'adhérents l'année 2018 + n par la suite de terme général u_n .

On a donc $u_0 = 416$.

1. Calculer u_1 et u_2 . Arrondir les résultats à l'unité.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser son premier terme et sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
4. Calculer u_7 . Interpréter ce résultat par rapport aux données de l'énoncé.
5. À partir de quelle année le président du club peut-il espérer dépasser les 700 adhérents ?

Exercice 2 :

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.

Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

Offre
Intérêts composés au taux annuel constant de 3 %.
À la fin de chaque année le capital produit 3 % d'intérêts qui sont intégrés au capital.

On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n , u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa.

On a ainsi $u_0 = 5\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 5\,150$ et $u_2 = 5\,304,5$.
2.
 - a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.
4. Si Lisa n'utilise pas le capital dès ses 18 ans, quel âge aura-t-elle quand celui-ci dépassera 10 000 euros ?

Exercice 3 :

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de 3,7 % chaque année.

On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $2000 + n$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'année à partir de l'an 2000.

Ainsi, $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n .
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.
5. Des études montrent que 20 % de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70 % de ces déchets finissent par couler.

Montrer que la quantité totale, arrondie au million de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

Exercice 4 :

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes début janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions pour l'année 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvellent leur inscription l'année suivante et qu'il y aura également 400 nouveaux adhérents.

Pour tout entier naturel n , on peut donc modéliser le nombre d'inscrits à la médiathèque n années après 2013 par une suite numérique (a_n) définie par : $a_0 = 2500$ et $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.

1. Calculer a_1 et a_2 .
2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 2000$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
 - b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
 - d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leq 2010$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5 :

En 2019, les déchets d'une entreprise sont évalués à 6 000 tonnes.

Cette entreprise s'engage à réduire ses déchets de 5 % chaque année.

1. Avec cette politique, quelle quantité de déchets peut envisager l'entreprise pour l'année 2020?
2. Pour tout entier naturel n , on note d_n la quantité de déchets produits en tonne par cette entreprise l'année $2019 + n$.

Avec cette notation, on a alors $d_0 = 6000$.

- a. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n pour tout entier naturel n .
- b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?
- c. Déterminer la quantité totale de déchets produits par l'entreprise entre 2019 et 2023.

On arrondira le résultat à la tonne près.

3. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien d'années d'application de cette politique de réduction des déchets la quantité annuelle produite aura diminué de 40 % par rapport à la quantité produite en 2019.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous sur la copie afin qu'il permette de répondre à la question posée :

```
D ← 6000
N ← 0
Tant que D .....
    D ← .....
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

Traduire l'algorithme en langage Python.

PARTIE 4 : ETUDE DE FONCTIONS

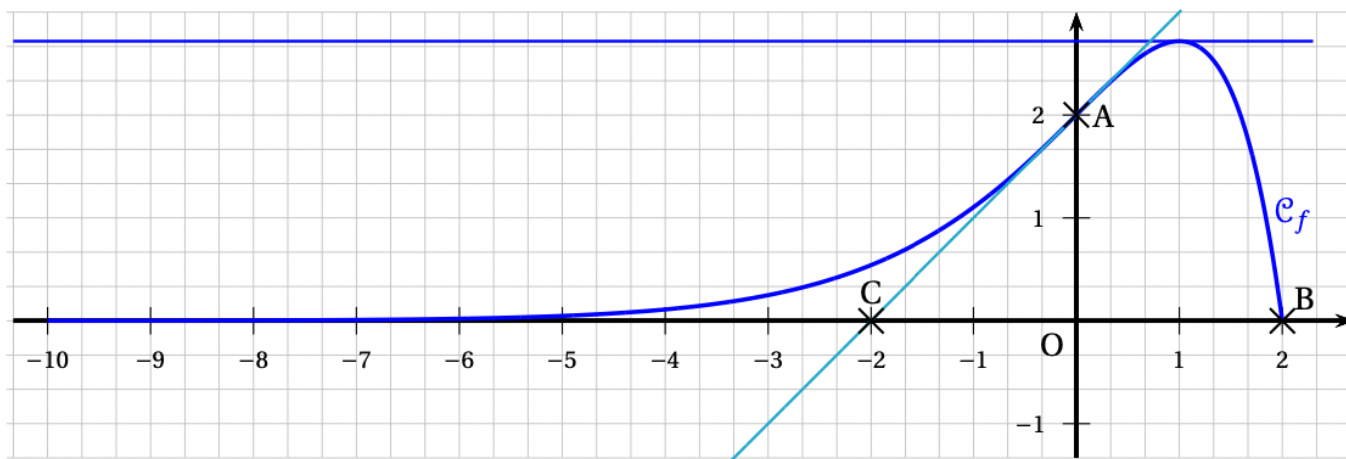
Exercice 1 :

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.

On a placé dans ce repère les points $A(0 ; 2)$, $B(2 ; 0)$ et $C(-2 ; 0)$.

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer la valeur de $f'(1)$.
2. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

On admet que cette fonction f est définie sur $[-10 ; 2]$ par

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-10 ; 2]$,

$$f'(x) = (-x + 1)e^x.$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.

Exercice 2 :

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -2 ; +\infty[$,

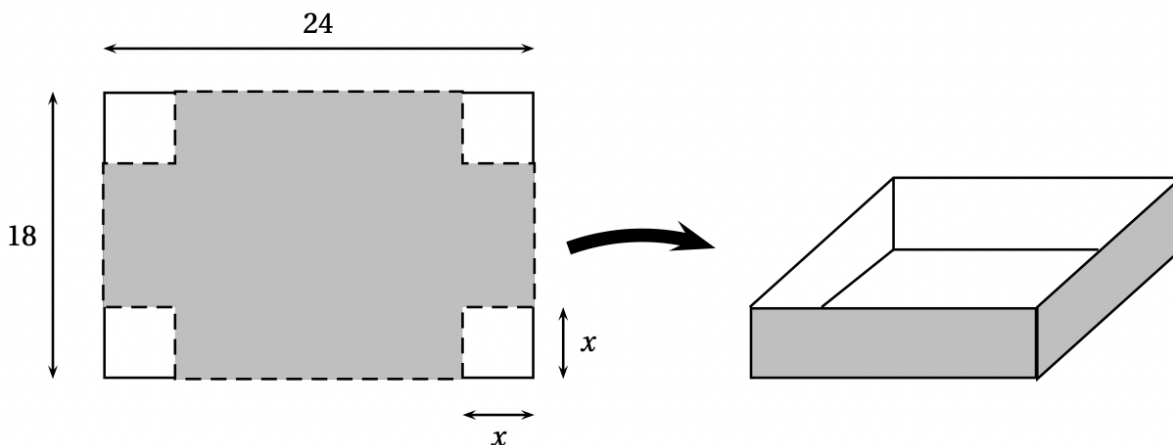
$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$$

où f' est la fonction dérivée de f .

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$.
4. Donner le minimum de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 3 :

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle $[0; 9]$ notée $V(x)$.

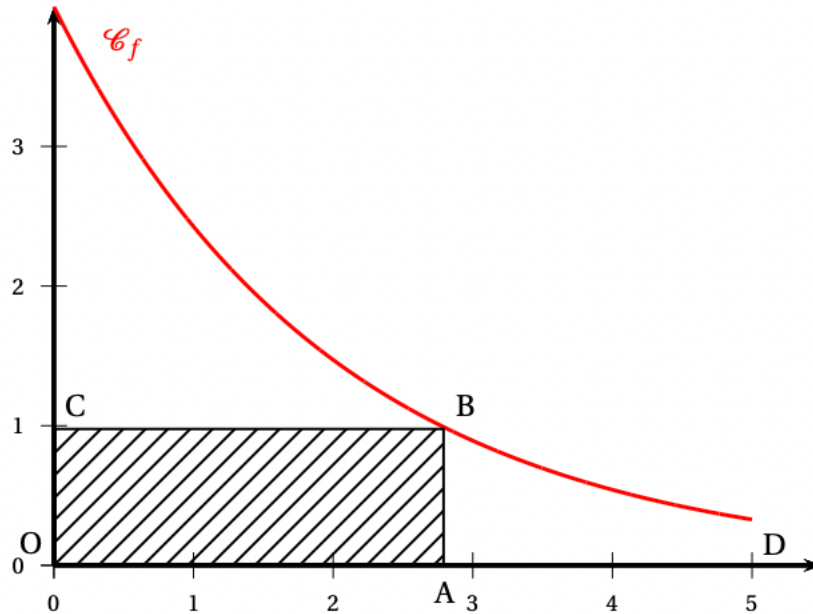
1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0; 9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.
2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0; 9]$.
Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x .
3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale?
5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Exercice 4 :

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.

Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0; 5]$ par

$$f(x) = 4e^{-0,5x}.$$



L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de $\mathcal{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées (5; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2 , est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0; 5]$.
2. La fonction g est dérivable sur $[0; 5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0; 5]$.
4. Où doit-on placer le point A sur [OD] pour obtenir une superficie d'enclos maximale?
Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2 .

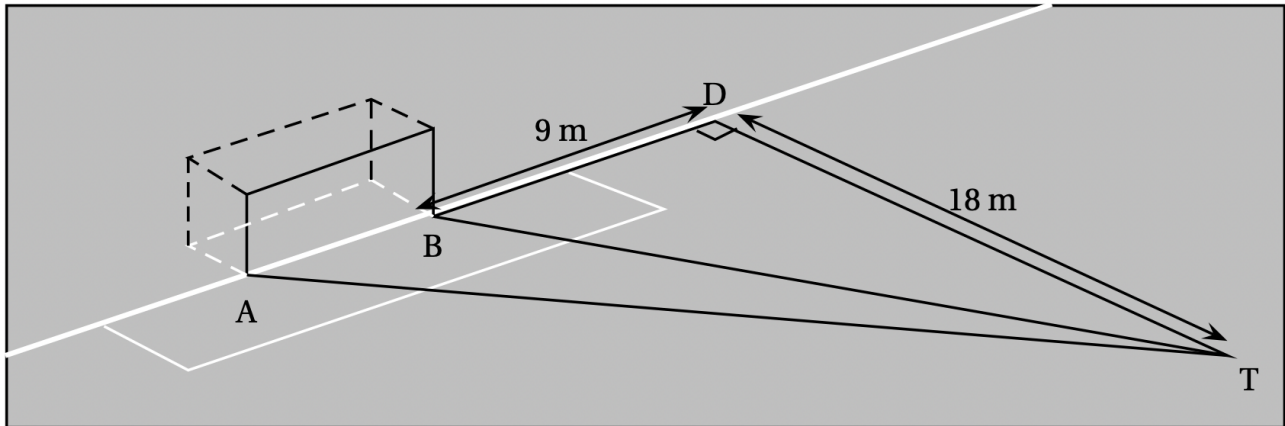
PARTIE 5 : PRODUIT SCALAIRE ET APPLICATIONS

Exercice 1 :

Sur le dessin ci-dessous, la largeur du but est de : $AB = 7,32$ mètres.

Les points A, B et D sont alignés.

On appelle T le point où se trouve un ballon. Le triangle TAD est rectangle en D.



1. Pourquoi $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$?
2. Démontrer que $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 470,88$.
3. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir, c'est-à-dire de l'angle $\widehat{ATB}$.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé on considère le point $A(-3 ; 5)$ et la droite (d) dont une équation cartésienne est $-x + 3y + 2 = 0$.

1. Tracer la droite (d) dans un repère orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (d) .
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (d) et passant par A.
4. En déduire que le point H, projeté orthogonal de A sur la droite (d) , a pour coordonnées $(-1 ; -1)$.
5. En déduire la distance entre le point A et la droite (d) .

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points $A(2 ; -1)$, $B(0 ; 3)$ et $C(3 ; 1)$.

1.
 - a. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.
 - b. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$, on donnera les valeurs exactes.
 - c. Vérifier que $\cos(\widehat{BAC}) = 0,6$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.
2.
 - a. Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est $2x + y - 3 = 0$.
 - b. On note H le pied la hauteur du triangle ABC issue du sommet C. Déterminer les coordonnées du point H.

Exercice 4 :

Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle. Il a été représenté ci-contre dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les coordonnées des sommets du carré :

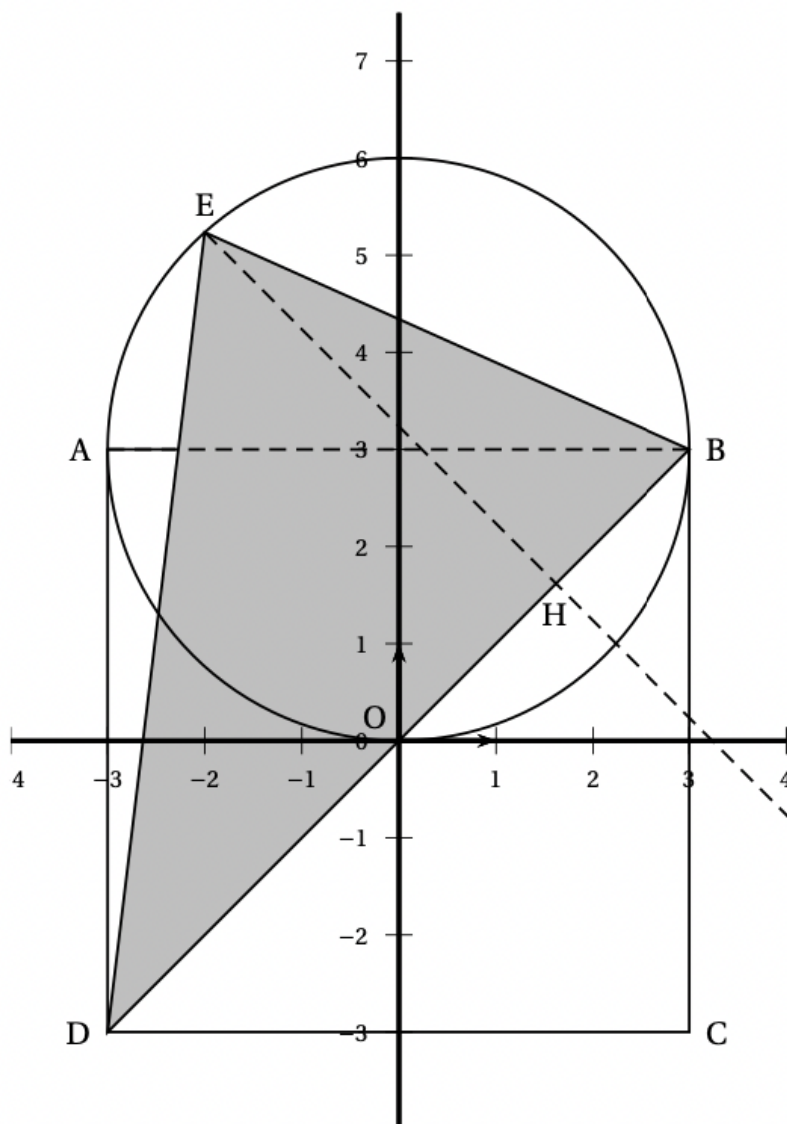
$A(-3; 3)$, $B(3; 3)$, $C(3; -3)$,

$D(-3; -3)$.

On considère le point $E(-2; 3 + \sqrt{5})$.

On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$.

On note I le milieu de $[AB]$.



1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne

$$x + y - (1 + \sqrt{5}) = 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD) .
4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).
5. Montrer que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 42 + 6\sqrt{5}$.

On admet que $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{42 + 12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BDE}$ au degré près.